Παράδειγμα (DC motor με αδρανειακό φορτίο)

$$\dot{\theta} = \omega \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\alpha \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \beta \end{bmatrix}$$
$$\dot{\omega} = -\alpha\omega + \beta u$$

Η resolvent είναι,

$$\Phi(s) = (sI-A)^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 0 & s+\alpha \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{s(s+\alpha)} \begin{bmatrix} s+\alpha & 1 \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & \frac{1}{s(s+\alpha)} \\ 0 & \frac{1}{s+\alpha} \end{bmatrix}$$

Παίρνουμε αντιστρ. μετασχ. Laplace κάθε όρου,

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\alpha}(1-e^{-\alpha t}) \\ 0 & e^{-\alpha t} \end{bmatrix}$$

ΜΕΘΟΔΟΣ LEVERRIER

Για ένα σύστημα n-στής τάξης η μήτρα $(sI-A)$ είναι,

$$sI-A = \begin{bmatrix} s-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & s-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & s-a_{nn} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Η αντίστροφή της γράφεται

$$(sI-A)^{-1} = \frac{\operatorname{adj}(sI-A)}{\det(sI-A)} \tag{8}$$

όπου

$$\det(sI-A) = s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_n \tag{9}$$

είναι η χαρακτηριστική εξίσωση.

Η adjoint μιας nxn μήτρας είναι επίσης nxn μήτρα, με στοιχεία τους συμπαράγοντες της αρχικής μήτρας. Έτσι κάθε στοιχείο στην adj (sI−A) είναι πολυώνυμο του s με μέγιστο βαθμό n−1. Έχουμε λοιπόν ότι,

$$\operatorname{adj}(sI-A) = E_1 s^{n-1} + E_2 s^{n-2} + \dots + E_n \tag{10}$$

Η resolvent γράφεται,

$$(sI-A)^{-1} = \frac{E_1 s^{n-1} + \dots + E_n}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \tag{11}$$

Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της Εξ. (11) με $[\det(sI-A)]\cdot(sI-A)$, βρίσκουμε,

$$[\det(sI-A)]\,I = (sI-A)(E_1 s^{n-1} + E_2 s^{n-2} + \dots + E_n) \tag{12}$$

ή

$$s^n I + a_1 s^{n-1} I + \dots + a_n I = s^n E_1 + s^{n-1}(E_2 - AE_1) + \dots$$
$$\dots + s(E_n - AE_{n-1}) - AE_n \tag{13}$$

Εξισώνουμε τους συντελεστές του s^k στα δύο μέλη,

$$\begin{aligned} E_1 &= I \\ E_2 - AE_1 &= a_1 I \\ E_3 - AE_2 &= a_2 I \\ &\vdots \\ E_n - AE_{n-1} &= a_{n-1} I \\ -AE_n &= a_n I \end{aligned} \tag{14}$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε τώρα τίς μήτρες E_i αναγωγικά,

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= I \\ E_2 &= AE_1 + a_1 I \\ E_3 &= AE_2 + a_2 I \\ &\vdots \\ E_n &= AE_{n-1} + a_{n-1} I \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

Η τελευταία εξίσωση στη (14) ήτοι $-AE_n = a_n I$ είναι πλεονάζουσα, αλλά μπορεί να χρησιμεύσει για έλεγχο του αριθμητικού αλγόριθμου. Η εξίσωση αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$E_{n+1} = AE_n + a_n I = 0 \qquad (16)$$

Ο προσδιορισμός των συντελεστών $a_1, a_2, \ldots, a_n$ του χαρακτ. πολυωνύμου, μπορεί να δειχθεί, ότι γίνεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_1 &= -tr(AE_1) \\ a_2 &= -\tfrac{1}{2} tr(AE_2) \\ &\vdots \\ a_i &= -\tfrac{1}{i} tr(AE_i) \qquad i = 1, 2, \ldots k \end{aligned} \qquad (17)$$

Αλγόριθμος για τον υπολογισμό

Χρήσιμος για υπολογισμό με το χέρι ή computer. Δυστυχώς δεν είναι καλός αλγόριθμος για $n > 10$. Η μήτρα E_{n+1} γίνεται τόσο μεγάλη οπότε οι συντελ. a_i και E_i είναι ύποπτοι.