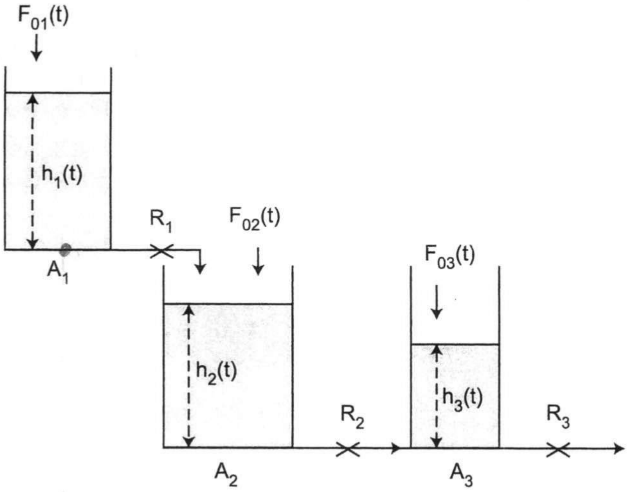
Δίδεται το γραμμικό δυναμικό σύστημα που φαίνεται στο Σχήμα 3.3. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, το σύστημα βρίσκεται σε μόνιμη κατάσταση.



Σχήμα 3.3 Δυναμικό σύστημα τριών δοχείων με και χωρίς αλληλεπίδραση

Οι εξισώσεις που διέπουν τη διεργασία είναι:

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = F_{01}(t) - \frac{h_1(t)}{R_1}$$

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = F_{02}(t) + \frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_2(t) - h_3(t)}{R_2}$$

$$A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} = F_{03}(t) + \frac{h_2(t) - h_3(t)}{R_2} - \frac{h_3(t)}{R_3}$$

α) Να υπολογισθεί το μοντέλο κατάστασης, οι τιμές των μεταβλητών κατάστασης στην αρχική μόνιμη κατάσταση καθώς και οι συναρτήσεις μεταφοράς του συστήματος.

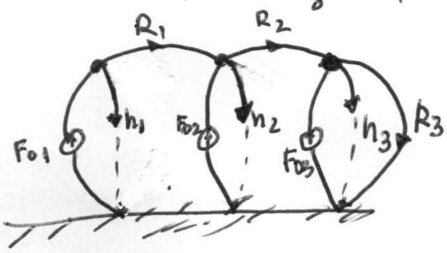
Δεδομένα:

$R_1 = R_2 = R_3 = R = 2$ m^{-2} hr, $A_1 = 2$ m^2, $A_2 = 3$ m^2, $A_3 = 4$ m^2.

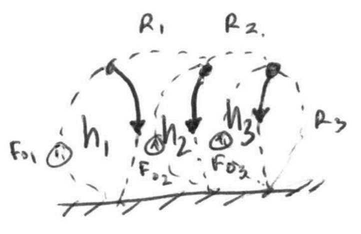
$u \longleftarrow F_{01s} = 2$ m^3 hr^{-1}, $F_{02s} = 0$ m^3 hr^{-1}, $F_{03s} = 0$ m^3 hr^{-1}

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$



γράφος.



δένδρο-δεσμοί

- Για το διάνυσμα εισόδου u_e να εφεθεί το σημείο ισορροπίας (x_e) του συστήματος

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\dot{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}}_{x} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{u} \rightarrow$$

$h_1 = 4\ m$

$h_2 = 8\ m$ Άρα $x_e = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \\ 4 \end{bmatrix}$

$h_3 = 4\ m$

- Να γραφούν οι εξισώσεις του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας:

$$\dot{x}' = A' \cdot x' + B' \cdot u'$$

$$y' = C' \cdot x'$$

όπου $\underline{x}' = \underline{x_e} - \underline{x}$, $\underline{u}' = \underline{u_e} - \underline{u}$, $\underline{y}' \doteq \underline{y_e} - \underline{y}$

$$f_1(\underline{x},\underline{u}) = -\frac{1}{4} x_1 + \frac{1}{2} u_1$$

$$f_2(\underline{x},\underline{u}) = \frac{1}{6} x_1 - \frac{1}{6} x_2 + \frac{1}{6} x_3 + \frac{1}{3} u_2$$

$$f_3(\underline{x},\underline{u}) = \frac{1}{8} x_2 - \frac{1}{4} x_3 + \frac{1}{4} u_3.$$

$$A' = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

$$B' = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} & \frac{\partial f_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} & \frac{\partial f_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} & \frac{\partial f_3}{\partial u_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

Για να σχεδιάσουμε ένα σύστημα ελέγχου με το λιγότερο δυνατό κόστος προτείνεται η μέτρηση μόνο της δεξαμενής 3.

Να γραφούν οι εξισώσεις του συστήματος γύρω από το σημείο ισορροπίας:

$$\dot{x}' = A' \cdot x' + B' \cdot u'$$
$$y' = C' \cdot x'$$

όπου $x' = x_e - x$, $u' = u_e - u$, $y' = y_e - y$

$$C = [0 \;\; 0 \;\; 1] \rightarrow y = h_3 = x_3 \rightarrow \underline{y} = \underline{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$C' = \frac{\partial y}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}} = [0 \;\; 0 \;\; 1]$$

Άρα

$$\underline{\dot{x}}' = \overset{A'}{\begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix}} \cdot \underline{x}' + \overset{B'}{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}} \cdot \underline{u}'$$

$$\underline{y}' = [0 \;\; 0 \;\; 1] \cdot \underline{x}'$$