ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Οι εξισώσεις ενός ηλεκτροστατικού γυροσκοπίου είναι

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K}{m} x_1 - \frac{1}{2\varepsilon_0 A m} x_3^2 + g$$

$$\dot{x}_3 = -\frac{D}{\varepsilon_0 A \cdot R} x_3 - \frac{1}{\varepsilon_0 A \cdot R} x_1 \cdot x_3 + \frac{u}{R}$$

x_1 = θέση

x_2 = ταχύτητα

x_3 = αδρανεια φορτίου

u = τάση εισόδου

Θέλουμε $\underline{\dot{x}}^* = A' \underline{x}^* + B' \underline{u}^*$

γύρω από κάποιο σημείο λειτουργίας $\underline{x}^0, \underline{u}^0$.

Για τις συνθήκες $\underline{x}^0$ και $\underline{u}^0$ το σύστημα βρίσκεται σε ισορροπία $\rightarrow$

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}^0, \underline{u}^0) = 0$$

Άρα οι εξισώσεις ισορροπίας είναι

$$0 = x_2^0$$

$$0 = -\frac{K}{m} x_1^0 - \frac{1}{2\varepsilon_0 A m} (x_3^0)^2 + g$$

$$0 = -\frac{D}{\varepsilon_0 A} x_3^0 - \frac{1}{\varepsilon_0 A} x_1^0 x_3^0 + u^0$$

Επιθυμητές συνθήκες ισορροπίας για λειτουργία του γυροσκοπίου είναι:

$$x_1^0 = 0 \quad , \quad x_2^0 = 0$$

Άρα οι εξισώσεις γίνονται:

$$0 = -\frac{1}{2\varepsilon_0 A m}\left(x_3^o\right)^2 + g$$

$$0 = -\frac{D}{\varepsilon_0 A} x_3^o + u^o$$

Λύνοντας έχουμε:

$$x_3^o = \sqrt{2\varepsilon_0 A m g}$$

$$u^o = D\sqrt{\frac{2gm}{\varepsilon_0 A}}$$

Γραμμικοποιούμε τις εξισώσεις γύρω από το συγκεκριμένο σημείο ισορροπίας.

Οι εξ. ως προς τις αποκλίσεις:

$$u^* = u - u^o = u - D\sqrt{\frac{2m \cdot g}{\varepsilon_0 A}}$$

$$x_1^* = x_1 - x_1^o = x_1$$

$$x_2^* = x_2 - x_2^o = x_2$$

$$x_3^* = x_3 - x_3^o = x_3 - \sqrt{2\varepsilon_0 A \cdot m \cdot g}$$

$$A' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{k}{m} & 0 & -\sqrt{\frac{2g}{\varepsilon_0 A \cdot m}} \\ -\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 A R^2}} & 0 & -\frac{D}{\varepsilon_0 A \cdot R} \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{R} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x}_1^* &= x_2^* \\ \dot{x}_2^* &= -\frac{k}{m} x_1^* - \sqrt{\frac{2g}{\varepsilon_0 A m}}\, x_3^* \\ \dot{x}_3^* &= -\sqrt{\frac{2mg}{\varepsilon_0 A R^2}}\, x_1^* - \frac{D}{\varepsilon_0 A \cdot R} x_3^* + \frac{u^*}{R} \end{aligned}}$$

$$\underline{\dot{x}^{\emptyset}} = A' \cdot \underline{x}^{\emptyset} + B' \cdot u^{\emptyset}$$