Μεσω της controllabity Gramian αποδείξτε ότι το σύστημα $\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \underline{u}$ είναι ελέγξιμο:

ΛΥΣΗ:

Απο την θεωρεία ξέρουμε ότι για να είναι ενα σύστημα ελέγξιμο για $t_f > 0$ το Gramian μητρώο πρέπει να είναι μή ιδιόμορφο.

$$W(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A \cdot \tau} B \cdot B^T e^{A^T \tau} \cdot d\tau \quad (\text{Gramian})$$

$$e^{At} = I + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Άρα

$$W(t_f) = \int_0^{t_f} e^{A \cdot \tau} \cdot B B^T e^{A^T \cdot \tau} \cdot d\tau =$$

$$= \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \tau^2 & \tau \\ \tau & 1 \end{bmatrix} d\tau =$$

$$= \begin{bmatrix} t_f^3/3 & 0.5\, t_f^2 \\ 0.5\, t_f^2 & t_f \end{bmatrix} = W(t_f)$$

Για να ένaι η $W(t_f)$ μή-ιδιόμορφη πρέπει

$$t_f^3 > 0 \quad \text{και} \quad t_f^4/3 - (0.5\, t_f^2)(0.5\, t_f^2) > 0$$

το οποίο ισχύει πάντοτε για $t_f > 0$.

Αρα το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.