ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίδεται το ΓΧΑΣ σύστημα

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -a \end{bmatrix} \cdot x + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u$$

το οποίο θέλουμε να ανταποκρίνεται γρήγορα (χρόνος αποκατάστασης $t_s = 1$ sec) και χωρίς υπερακόντιση επιτυγχάνοντας την επιθυμητή έξοδο $y = x_1$ σε είσοδο αναφοράς $r(t) = R \cdot u_s(t)$.

- Ποιά από τις 2 γνωστές μας μεθόδους «Παρακολούθησης Εισοδου Αναφοράς» μπορεί να εφαρμοσθεί σε αυτή τη περίπτωση και γιατί?
- Να σχεδιασθεί ο κατάλληλος νόμος ελέγχου «Παρακολούθησης Εισοδου Αναφοράς» που ικανοποιεί τις παραπάνω προδιαγραφές (χρόνος αποκατάστσης – μηδενική υπερακόντιση), και
- Αν είναι διαθέσιμη για μέτρηση μόνο η κατάσταση x_1 πως θα επιτευχθούν τα παραπάνω?

- Η συνάρτηση μεταφοράς ανοιχτού βρόχου για $y = x_1$

$$H_{OL}(s) = C(sI-A)^{-1}B = [1 \ \ 0] \begin{bmatrix} \frac{s}{s(s+a)} & -\frac{1}{s(s+a)} \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow$$

$$H_{OL}(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

Οι πολοι του συστήματος είναι $s_1 = 0$ και $s_2 = -a$

Λόγω του πόλου $s_1 = 0$ <u>δεν</u> μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των σερβομηχανισμών.

Εφαρμόζουμε την μέθοδο "Κέρδος εισόδου αναφοράς"

- Ο κατάλληλος νόμος ελέγχου «Παρακολούθησης εισόδου αναφοράς» της παραπάνω μεθόδου δίνεται απο τη σχέση

$$u = -Kx + G \cdot r$$

Επειδή δεν θέλουμε υπερακόντιση και θέλουμε γρήγορη απόκριση τοτε επιλέγουμε κρίσιμη απόσβεση ($\zeta = 1$).

Χρόνος αποκατάστασης $t_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} = 1 \rightarrow \omega_n = 4$

Οι δύο ίσες πραγματικές ρίζες της κρίσιμης απόσβεσης του συστήματος κλειστού βρόχου θα είναι $s_{1,2}=-4$.

Το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο θα είναι

$$\alpha(s)=(s+4)^2=s^2+8s+16.$$

Γνωρίζουμε ότι $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -\alpha\end{bmatrix}$ και $A^2=\begin{bmatrix}0 & -\alpha\\ 0 & -\alpha^2\end{bmatrix}$

άρα έχουμε $\alpha(A)=A^2+8A+16\cdot I=\begin{bmatrix}16 & 8-\alpha\\ 0 & \alpha^2-8\alpha+16\end{bmatrix}$

Το σύστημα είναι ελέγξιμο επειδή

$$C(A,B)=\begin{bmatrix}B & AB\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & -\alpha\end{bmatrix} \text{ και } \det C(A,B)\neq 0$$

Εφαρμόζουμε τον τύπο του Ackerman:

$$K=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot C^{-1}(A,B)\cdot\alpha(A)=\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\alpha & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}16 & 8-\alpha\\ 0 & \alpha^2-8\alpha+16\end{bmatrix}$$

$$K=\begin{bmatrix}16 & 8-\alpha\end{bmatrix}$$

Το G υπολογίζεται από τη σχέση:

$$G=-\left[C\cdot(A-BK)^{-1}\cdot B\right]^{-1}=-\left[\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{1}{16}\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\right]^{-1}\rightarrow$$

$$\rightarrow G=16.$$

Άρα ο νόμος ελέγχου θα είναι της μορφής

$$u=-\begin{bmatrix}16 & 8-\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+16\cdot r$$

• Αν είναι διαθέσιμη μόνο η x_1 τότε πρέπει να σχεδιάσουμε παρατηρητή!

Πρέπει πρώτα να εξετάσουμε αν το σύστημα είναι παρατηρήσιμο.

$$Q(A,C) = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = Q^{-1}(A,C)$$

Επιλέγουμε πόλους 5 φορές πιό μακριά από αυτούς του κλειστού βρόχου δηλ. $s_{1,2} = -20$

Το επιθυμητό χαρακτηριστικό πολυώνυμο γίνεται:

$$\alpha(s) = (s+20)^2 = s^2 + 40s + 400.$$

και $\alpha(A) = A^2 + 40 \cdot A + 200 I =$

$$= \begin{bmatrix} 400 & 40-\alpha \\ 0 & \alpha^2 - 40\alpha + 400 \end{bmatrix}$$

Εφαρμόζοντας Ackerman παίρνουμε

$$L = \alpha(A) \cdot Q^{-1}(A,C) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 40-\alpha & \alpha^2 - 40\alpha + 400 \end{bmatrix}^T$$

Οπότε η εκτίμηση κατάστασης δίδεται από τη σχέση:

$$\dot{\hat{x}} = (A - LC)\hat{x} + B \cdot u + L \cdot y = \begin{bmatrix} \alpha - 40 & 1 \\ -(\alpha^2 - 40\alpha + 400) & -\alpha \end{bmatrix} \cdot \hat{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u +$$

$$+ \begin{bmatrix} 40 - \alpha \\ \alpha^2 - 40\alpha + 400 \end{bmatrix} \cdot x_1$$

Για τον νόμο ελέγχου: $u = -\begin{bmatrix} 16 & 8-\alpha \end{bmatrix} \hat{x} + 16 \cdot r$