Θεωρούμε την εξίσωση κίνησης:

$$\ddot{x} = u(t)$$

μιας μοναδιαίας μάζας κινούμενης κατά μήκος μιας ευθείας υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης $u(t)$. Επιλέγοντας σαν καταστάσεις τη θέση $x_1 = x$ και την ταχύτητα $x_2 = \dot{x}$ της μάζας, η μοντελοποίηση δίνεται από τις ακόλουθες εξισώσεις κατάστασης:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t),\ A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

με αρχικές συνθήκες $x_1(0) = x_{10}$, $x_2(0) = x_{20}$. Η μάζα μετά από ένα δευτερόλεπτο βρίσκεται στο σημείο $x(1) \triangleq x_1(1) = 1$ με ταχύτητα $\dot{x}(1) \triangleq x_2(1) = 1$. Να βρεθεί η αρχική θέση και ταχύτητα της σημειακής μάζας, δλδ, να υπολογιστούν τα x_{10} , x_{20} υποθέτοντας ότι $u(t) = 1$, $\forall t \geq 0$.

Λύση

Εύκολα υπολογίζουμε ότι
$$\exp(At) = I_2 + At = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
επειδή $A^2 = 0$. Οπότε η λύση του δυναμικού συστήματος δίνεται ως:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\int_0^t \begin{bmatrix} -\tau \\ 1 \end{bmatrix} d\tau \\
&= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{t^2}{2} \\ t \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Δίνεται επίσης ότι για $t = 1$ ισχύει $x_1(1) = 1$ και $x_2(1) = 1$. Οπότε,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Άρα λύνοντας ως προς τις αρχικές συνθήκες έχουμε

$$\begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Επαλήθευση: Η ακριβής λύση της διαφορικής εξίσωσης δεύτερης τάξης είναι $x(t) = \frac{1}{2}t^2 + \dot{x}(0)t + x(0)$. Πράγματι για $x(0) = \frac{1}{2}$ και $\dot{x}(0) = 0$ ισχύει $x(1) = 1$ και $\dot{x}(1) = 1$.