Να προσδιορισθεί ο βέλτιστος έλεγχος γιά το σύστημα πρώτης τάξης $\dot{x} = -x + u$ με αρχική κατάσταση $x(0) = 0$, που μεγιστοποιεί την τελική τιμή του x ενώ ελαχιστοποιεί το συναρτησιακό κόστος $\int_0^1 u^2 dt$.

Λύση

Ορίζουμε ως συνάρτηση τελικού κόστους

$$S = -\Gamma x(1)$$

Αρα ο Δ.Λ.Α είναι $V = -\Gamma x(1) + \frac{1}{2}\int_0^1 u^2 dt$

Η συνάρτηση Pontryagin είναι:

$$H = \frac{u^2}{2} + p(-x+u) = \frac{u^2}{2} - px + pu$$

$$\frac{\partial H}{\partial u} = u + p = 0 \Longrightarrow u^* = -p.$$

Αντικαθιστούμε το u^* στην H καί έχουμε, την

$$H^* = -\frac{p^2}{2} - px$$

Εξισώσεις state και co-state

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = -p - x \longrightarrow \dot{x} + x = -p \quad (1)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = p \longrightarrow \dot{p} - p = 0 \quad (2)$$

$$(2) \rightarrow \quad p = k_1 e^{t}$$

$$(1) \rightarrow \quad x = k_2 e^{-t} - \frac{k_1}{2} e^{t}$$

Από την αρχική συνθήκη $x(0)=0$ βρίσκουμε

$$k_2 = \frac{k_1}{2}$$

πο την οριακή συνθήκη τελικού χρόνου:

$$\left[\frac{\partial S}{\partial \underline{x}} - \underline{p}\right]\delta \underline{x}\Big|_{t_f} + \left[H^* + \frac{\partial S}{\partial t}\right]\delta t\Big|_{t_f} = 0.$$

Έχουμε: $-\Gamma - p = 0 \Rightarrow -\Gamma - k_1 e = 0 \Rightarrow$

$$k_1 = -\frac{\Gamma}{e}$$

Επομένως ο βέλτιστος έλεγχος είναι

$$u^* = -p = -k_1 e^t = \Gamma e^{t-1}$$