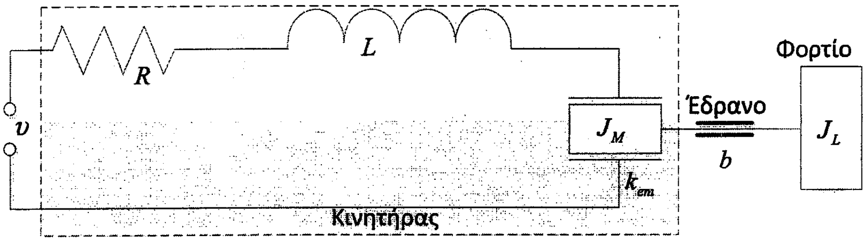
Θέμα-1 ([redacted]): Στο σχήμα φαίνεται το απλοποιημένο μοντέλο κινητήρα-DC σε διάταξη που περιστρέφει φορτίο. Οι εξισώσεις που περιγράφουν το σύστημα είναι:

$$\upsilon = i\cdot R + L\cdot\frac{di}{dt} + k_{em}\cdot\omega$$

$$k_{em}\cdot i = b\cdot\omega + \left(J_L + J_M\right)\cdot\frac{d\omega}{dt}$$

όπου $\upsilon(t)$: η τάση εισόδου του κινητήρα (<u>είσοδος</u>), $\omega(t)$: η γωνιακή ταχύτητα κινητήρα & φορτίου και $i(t)$: το ρεύμα που διαρρέει τον κινητήρα. Οι παράμετροι του συστήματος είναι: αντίσταση R=2Ω, επαγωγή L=1mH, ηλεκτρομηχανική σταθερά k_{em}=2 N·m/A, ροπή αδράνειας κινητήρα J_M=0.005 kg·m^2, ροπή αδράνειας φορτίου J_L=0.015 kg·m^2 και η σταθερά στροφικής (ιξώδους) τριβής εδράνου b=0.25 N·m·s/rad.



Αν θεωρήσουμε το διάνυσμα κατάστασης $x=\begin{bmatrix}\theta & \omega & i\end{bmatrix}^T$, όπου $\theta(t)$: η γωνία στροφής κινητήρα και φορτίου

- Να ευρεθούν οι εξισώσεις κατάστασης του παραπάνω συστήματος και να γραφούν σε μητρωική μορφή.
- Είναι το παραπάνω σύστημα ελέγξιμο?
- Να ευρεθεί το κέρδος ανάδρασης μεταβλητών κατάστασης που τοποθετεί όλους τους πόλους του συστήματος στο σημείο -10 .

<u>ΛΥΣΗ</u>

- $\dot{\theta} = \omega$

Οι εξισώσεις κατάστασης γράφονται.

$$\frac{di}{dt} = -\frac{K_{em}}{L}\omega - \frac{R}{L}i + \frac{\upsilon}{L}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{b\omega}{J_L+J_M}\omega + \frac{K_{em}}{J_L+J_M}i$$

Αρ.

$$\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\ \dot{\omega}\\ \dot{i}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -b/(J_L+J_M) & K_{em}/(J_L+J_M)\\ 0 & -K_{em}/L & -R/L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta\\ \omega\\ i\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/L\end{bmatrix}\upsilon$$

Αντικαθιστώντας:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12{,}5 & 100 \\ 0 & -2000 & -2000 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix}$$

- Ελεγξιμότητα: $Q = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10^5 \\ 0 & 10^5 & -2012{,}5\cdot 10^5 \\ 10^3 & -2\cdot 10^6 & 38\cdot 10^8 \end{bmatrix}$$

$\det(Q) = -10^{13} \neq 0.$ άρα το σύστημα ελέγξιμο.

- Έχω 3 πόλους στο -10. $\rightsquigarrow (s+10)^3 =$
$= s^3 + 30s^2 + 300s + 1000$

Από Ackerman

$$K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Q^{-1} \cdot \alpha(A) =$$

$$= \begin{bmatrix} Q^{-1}_{31} & Q^{-1}_{32} & Q^{-1}_{33} \end{bmatrix} (A^3 + 30A^2 + 300A + 1000I)$$

$$Q^{-1}_{31} = \frac{Q_{21}\cdot Q_{32} - Q_{31}\cdot Q_{22}}{|Q|} = 10^{-5}$$

$$Q^{-1}_{32} = \frac{Q_{12}Q_{31} - Q_{11}Q_{32}}{|Q|} = 0$$

$$Q^{-1}_{33} = \frac{Q_{11}Q_{22} - Q_{12}Q_{21}}{|Q|} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -12{,}5 & 100 \\ 0 & -2000 & -2000 \end{bmatrix} \qquad A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -12{,}5 & 100 \\ 0 & -199843{,}75 & -201250 \\ 0 & 4025\cdot 10^3 & 38\cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & -199843{,}75 & -201250 \\ 0 & 404{,}99\cdot 10^6 & 382{,}5\cdot 10^6 \\ 0 & -7{,}65\cdot 10^9 & -710{,}75\cdot 10^5 \end{bmatrix}$$

Άρα $\underline{K} = \begin{bmatrix} 10^{-5} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_{11}\cdot 10^{-5} & \alpha_{12}\cdot 10^{-5} & \alpha_{13}\cdot 10^{-5} \end{bmatrix}.$$

$\alpha_{11} = 1000$

$\alpha_{12} = -199843{,}75 + 30(-12{,}5) + 300\cdot 1 + 0$
$= -199918{,}75$

$\alpha_{13} = -201\cdot 250 + 30\cdot 100 + 0 + 0 = -198250.$

Άρα τα κέρδη K_1, K_2, K_3 είναι:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} 0{,}01 & -1{,}99 & -1{,}98 \end{bmatrix}.$$