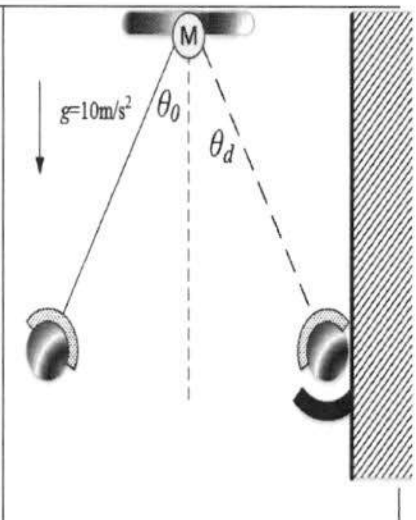
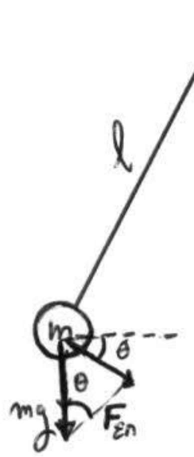
Ασκηση (30pts)

Το διπλανό σχήμα απεικονίζει «ρομπότ» ενός βαθμού ελευθερίας που λειτουργεί στο κατακόρυφο επίπεδο κινούμενο υπό την επενέργηση ενός κινητήρα Μ, παραλαμβάνοντας μέσω κατάλληλου ακροδέκτη αντικείμενα (σφαιρικού σχήματος) από κάποια γωνία ϑ_0 και αφήνοντάς τα σε κάποια γωνία ϑ_d. Θεωρείται ότι το έλασμα-σύνδεσμος μήκους l=1m είναι αβαρής ενώ ο συνδυασμός ακροδέκτη – αντικειμένου έχει μάζα m=1kg. Αν θεωρηθεί ως είσοδος επενέργησης η ροπή u από τον κινητήρα, ως μοναδική διαθέσιμη μέτρηση η γωνιακή ταχύτητα ω και επίσης θεωρηθεί ο συντελεστής ιξώδους στροφικής τριβής α [$N \bullet m \bullet sec/rad$] :

- (10%) Να γραφτεί η διαφορική εξίσωση κίνησης του συστήματος
- (5%) Να γραφουν οι εξισώσεις κατάστασης
- (7%) Να γραμμικοποιηθεί το σύστημα
- (4%) Να ευρεθεί αν το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι ελέγξιμο.
- (4%) Να ευρεθεί αν το γραμμικοποιημένο σύστημα είναι παρατηρήσιμο.



•



$$F_{\varepsilon\pi} = m \cdot g \sin\theta$$

$$M_{\varepsilon\pi} \text{ (ροπή)} = m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta$$

Εισοδος συστήματος : $M_{o\lambda} = u$ (απο κινητήρα) $- M_{\varepsilon\pi}$ (Ροπή επαναφοράς)*
(πηγή).

* Το Βάρος ενός σώματος στο πεδίο βαρύτητας μοντελοποιείται ως πηγή δύναμης F_B ή πηγή ροπής T_B.

Εφαρμόζοντας ισορροπία ροπών στο σύστημα έχουμε.

$$u - m \cdot g \cdot l \cdot \sin\theta = \underbrace{m \cdot l^2 \ddot{\theta}}_{\text{αδράνεια μάζας (m)}} + \underbrace{\alpha \dot{\theta}}_{\text{τριβή}}$$

Αρα η διαφορική εξίσωση του συστήματος :

$$m l \ddot{\theta} + m g l \sin\theta + \alpha \dot{\theta} = u$$

2/5

• Το σύστημα είναι $2^{ης}$ τάξης

$$x_1 = \theta \,, \qquad \dot{x}_1 = x_2$$
$$x_2 = \dot{\theta} = \omega \qquad \dot{x}_2 = \ddot{\theta} = u - a\dot{\theta} - mgl\sin\theta$$

εξισώσεις κατάστασης.

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -mgl \cdot \sin x_1 - \alpha x_2 + u$$

Αντικαθιστώντας με τις τιμές $m = 1kg$, $l = 1m$, $g = 10m/s^2$ έχουμε

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -10\sin x_1 - \alpha x_2 + u.$$

Επειδή πρόκειται για μη-γραμμικό σύστημα γράφουμε τις εξισώσεις κατάστασης στη μορφή $\dot{x} = f(x,u)$

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -10\sin x_1 - a x_2 + u \end{bmatrix}$$

και $y = x_2 = \omega$

• Γραμμικοποίηση του συστήματος

Προσδιορίζουμε Σ.Ι (σημεία ισορροπίας)

$$\dot{\tilde{x}} = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} \tilde{x}_2 = 0 \\ -10\sin\tilde{x}_1 - \alpha\tilde{x}_2 + \tilde{u} = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} \tilde{x}_2 = 0 \ (\omega = 0) \\ \sin\tilde{x}_1 = \dfrac{\tilde{u}}{10} \end{matrix}$$

Λαμβάνοντας ως σημείο ισορροπίας $\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0$.
Άρα. $\tilde{x}_1 = 0$, $\tilde{x}_2 = 0$, $\tilde{u} = 0$

Μεταβολές απόκλισης

$$x_{1*} = x_1 - \tilde{x}_1$$
$$x_{2*} = x_2 - \tilde{x}_2$$
$$u_* = u - \tilde{u}$$

Μερικές παράγωγοι:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0 \;,\; \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 \;,\; \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -10\cos x_1 \;,\; \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -a$$

Επίσης $\dfrac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \;,\; \dfrac{\partial f_2}{\partial u} = 1.$

Άρα συντελεστές του γραμμικοποιημένου συστήματος είναι:

$$A = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -a \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial f}{\partial \underline{u}}(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \frac{\partial h}{\partial \underline{x}}(\tilde{\underline{x}}, \tilde{\underline{u}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \;,\; D = \frac{\partial h}{\partial \underline{u}}(\tilde{x}, \tilde{u}) = 0.$$

Εξισώσεις κατάστασης γραμμικοποιημένου συστήματος.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{1*} \\ \dot{x}_{2*} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1*} \\ x_{2*} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_*$$

$$y_* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1*} \\ x_{2*} \end{bmatrix}$$