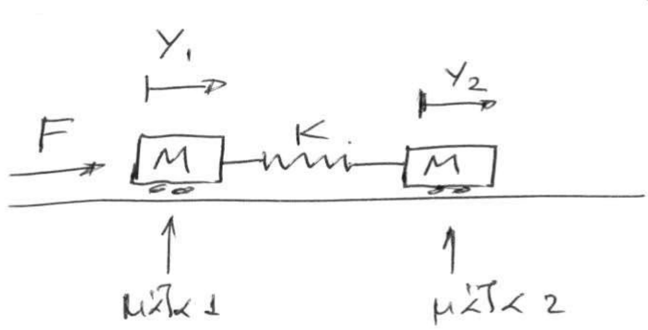
Άσκηση: 8

Για το κάτωθι σύστημα ποιός περιορισμός πρέπει να ισχύει έτσι ώστε να είναι πλήρως ελέγξιμο?



Έχουμε τις εξής μεταβλητές κατάστασης:

x_1: η μετατόπιση της 1ης μάζας

x_2: η ταχύτητα της 1ης μάζας

x_3: η μετατόπιση της 2ης μάζας

x_4: η ταχύτητα της 2ης μάζας.

Για την μάζα 2: έχουμε.

$$x_3 = y_2.$$
$$\dot{x}_3 = \dot{y}_2 = x_4 \quad \text{και} \quad \dot{x}_4 = \ddot{y}_2 = -\frac{K}{M}x_3 + \frac{K}{M}x_1$$

Για την μάζα 1 έχουμε

$$x_1 = y_1$$
$$\dot{x}_1 = \dot{y}_1 = x_2 \quad \text{και} \quad \dot{x}_2 = \ddot{y}_1 = \frac{K}{M}x_1 + \frac{F}{M}.$$

Άρα οι εξισώσεις κατάστασης σε διανυσματική-μητρική μορφή:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{K}{M} & 0 & \frac{K}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{K}{M} & 0 & -\frac{K}{M} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . F$$

Οι εξισώσεις για τα $\dot{x}_4$ και $\dot{x}_2$ προέκυψαν.
από την γενική σχέση:

$$m \frac{dy^2}{dt^2} + ky = F$$

Για την μάζα 1 έχουμε: $m \frac{d\ddot{y}_1}{dt^2} + k(y_1 - y_2) = F \rightarrow$

$$\rightarrow M\dot{x}_2 + k(x_1 - x_3) = F \rightarrow \underline{\dot{x}_2 = \frac{k}{M}x_3 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{F}{M}}$$

Όμοια για την μάζα 2 έχουμε: $m \frac{d\ddot{y}_2}{dt^2} + k(y_2 - y_1) = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow M\dot{x}_4 + k(x_3 - x_1) = 0 \rightarrow \underline{\dot{x}_4 = \frac{k}{M}x_1 - \frac{k}{M}x_3}$$

Ο πίνακας A είναι:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{M} & 0 & \frac{k}{M} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{M} & 0 & -\frac{k}{M} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και ο} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{F}{M} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Για $M = 1$ έχουμε:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ k & 0 & -k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} F$$

Ο πίνακας ελεγξιμότητας P για $n = 4$ είναι:

$$P = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A^2 B = \begin{bmatrix} 0 \\ -K \\ 0 \\ K \end{bmatrix}, \quad A^3 \cdot B = \begin{bmatrix} -K \\ 0 \\ K \\ 0 \end{bmatrix}$$

Άρα ο πίνακας ελεγξιμότητας είναι:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -K \\ 1 & 0 & -K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K \\ 0 & 0 & K & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det(P) = K^2$$

Για να είναι το σύστημα ελέγξιμο πρέπει $\det(P) \neq 0$ δηλαδή $\boxed{K \neq 0}$