Άσκηση 9

Θεωρούμε το σύστημα: $\dot{\underline{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$ (1)

όπου $\underline{x}$: n-διάστατο διάνυσμα, u: r-διάστατο διάνυσμα ελέγχου,

A: nxn μήτρα και B: nxr μήτρα.

Αν η μήτρα A της εξίσωσης (1) δεν έχει διακεκριμένα ιδιοδιανύσματα δεν μπορεί να γίνει διαγωνοποίηση. Στην περίπτωση αυτή, η A μπορεί να μετασχηματισθεί στη κανονική μορφή Jordan.

Αν, π.χ., η A έχει ιδιοτιμές $\lambda_1, \lambda_1, \lambda_1, \lambda_4, \lambda_4, \lambda_6, \ldots \lambda_n$ και έχει $n-3$ διακεκριμένα ιδιοδιανύσματα, η κανονική μορφή Jordan της A είναι:

$$J = \left[\begin{array}{ccc|cc|ccc} \lambda_1 & 1 & 0 & & & & & \\ 0 & \lambda_1 & 1 & & & & 0 & \\ 0 & 0 & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & \lambda_4 & 1 & & & \\ & & & 0 & \lambda_4 & & & \\ \hline & & & & & \lambda_6 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & & & \lambda_n \end{array}\right]$$

Οι υπομήτρες διαστάσεων 3x3 και 2x2 στη κύρια διαγώνιο λέγονται μπλόκς του Jordan.

Έστω ότι μπορούμε να βρούμε μια μήτρα μετασχηματισμού S', έτσι ώστε

$$S'^{-1} A S' = J$$

Ορίζουμε ένα νέο διάνυσμα κατάστασης $\underline{z}$

$$\underline{x} = S' \cdot \underline{z} \quad (2)$$

Με αντικατάσταση της εξίσωσης (2) στην (1) έχουμε:

$$\dot{\underline{z}} = S'^{-1} \cdot A S' \cdot \underline{z} + S'^{-1} B \cdot \underline{u} =$$
$$= J\underline{z} + S'^{-1} B \cdot \underline{u}$$

Η συνθήκη για πλήρη ελεγξιμότητα του συστήματος της εξίσωσης ① είναι ως εξής:

Το σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο όταν και μόνον όταν

1) κάθε Jordan μπλόκ αντιστοιχεί σε διαφορετικές ιδιοτιμές

2) Τα στοιχεία κάθε σειράς της $S^{-1}B$ που αντιστοιχούν στην τελευταία σειρά κάθε Jordan μπλόκ δεν είναι όλα μηδέν

3) Τα στοιχεία κάθε γραμμής της $S^{-1}B$ που αντιστοιχούν στις διακεκριμένες ιδιοτιμές δεν είναι όλα μηδέν.

<u>Παράδειγμα</u>: Το ακόλουθο σύστημα είναι πλήρως ελέγξιμο.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} u$$

Το ακόλουθο σύστημα <u>δεν</u> είναι πλήρως ελέγξιμο.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Γιατί?</u>