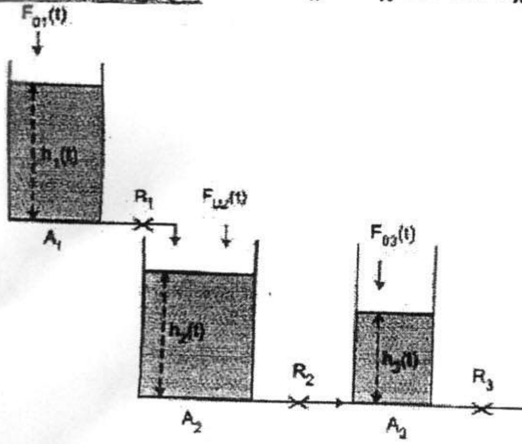
Ασκηση 3 :Το σύστημα δοχείων του σχήματος περιγράφεται από τις Διαφορικές Εξισώσεις



$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = F_{01}(t) - \frac{h_1(t)}{R_1}$$

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = F_{02}(t) + \frac{h_1(t)}{R_1} - \frac{h_2(t)-h_3(t)}{R_2}$$

$$A_3 \frac{dh_3(t)}{dt} = F_{03}(t) + \frac{h_2(t)-h_3(t)}{R_2} - \frac{h_3(t)}{R_3}$$

όπου $A_1 = 2\,m^2, A_2 = 3\,m^2, A_3 = 4\,m^2, R_1 = R_2 = R_3 = 2\,m^{-2}\cdot hr$, οι διατομές, τα ύψη & οι αντιστάσεις των εκροών και F_{01}, F_{02}, F_{03} η «τροφοδοσία» των αντίστοιχων δοχείων:

(α) Να γραφουν οι εξισώσεις κατάστασης $\dot{x} = A\cdot x + B\cdot u$ του παραπάνω συστήματος,

(β) Ως γνωστόν η εξίσωση εξόδου $y = C\cdot x$ παριστά τις μετρήσεις. Δεν έχουμε αποφασίσει για ποιές από τις στάθμες (ύψη) h_1, h_2, h_3 θα βάλουμε μετρητικά όργανα και εξετάζουμε όλες τις περιπτώσεις. Να βρεθούν οι πίνακες C που αντιστοιχούν σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

β-1. μέτρηση μόνο του h_1
β-2. μέτρηση μόνο του h_2
β-3. μέτρηση μόνο του h_3
β-4. μέτρηση των h_1 , h_2
β-5. μέτρηση των h_1 , h_3
β-6. μέτρηση των h_2 , h_3
β-7. μέτρηση των h_1, h_2, h_3

(γ) Δεδομένου ότι θέλουμε εν τέλει να σχεδιάσουμε ένα σύστημα ελέγχου με ανατροφοδότηση εξόδου, να ευρεθεί ο φθηνότερος (δηλ. με τους λιγώτερα μετρητικά όργανα) τρόπος (ή τρόποι) μετρήσεων από τους παραπάνω, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μία μεθοδολογία ελέγχου με ανατροφοδότηση εξόδου.

Λύση :

(α) $\underline{\dot{x}} = A\underline{x} + B\underline{u}$

$$\begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \\ \dot{h}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1R_1} & 0 & 0 \\ \frac{1}{A_2R_1} & -\frac{1}{A_2R_2} & \frac{1}{A_2R_2} \\ 0 & \frac{1}{A_3R_2} & -\frac{1}{A_3}\left(\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{A_3} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_{01} \\ F_{02} \\ F_{03} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(β) $\underline{Y} = C\underline{X} + \cancel{D\underline{u}}^{\,0} \rightarrow y = C[h_1\ h_2\ h_3]^T$

β-1 : $C = [1\ 0\ 0]$ β-2 : $C = [0\ 1\ 0]$ β-3 : $C = [0\ 0\ 1]$

β-4 : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ β-5 : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ β-6 : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

β-7 : $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Πρέπει να βρούμε τον πίνακα C από τους παραπάνω έτσι ώστε το σύστημα να είναι πλήρως παρατηρήσιμο με το μικρότερο κόστος.

Ξεκινάμε με τους απλούς b-1, b-2, b-3

b-1: $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0{,}25 & 0 & 0 \\ -0{,}0625 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(Q) = 0$$ μη παρατηρ.

b-2: $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -0{,}0694 & 0{,}0486 & -0{,}0694 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(Q) = 0$$ μη παρατηρ.

b-3: $C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}125 & -0{,}25 \\ 0{,}02083 & -0{,}052 & 0{,}0833 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \det(Q) \neq 0$$

Άρα μόνο με μέτρηση της h_3 το σύστημα το σύστημα μπορεί να ελεγχθεί με ανατροφοδότηση εξόδου. Αυτός είναι και ο πιο οικονομικός τρόπος αφού μετράμε μία μόνο μεταβλητή!