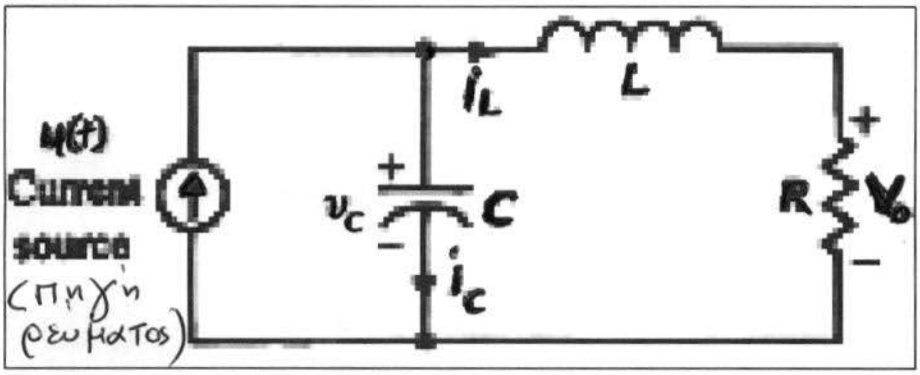
Στο παρακάτω κύκλωμα να θεωρηθεί ως είσοδος η πηγή ρεύματος (u(t)) και έξοδος η τάση στην αντίσταση.
($V_o$)




(1) Να γραφούν οι εξισώσεις κατάστασης και εξόδου.
(2) να ευρεθεί η συνάρτηση μεταφοράς του συστήματος
(3) Να ευρεθεί ο πίνακας (μήτρα) μεταβατικής κατάστασης.
(4) Για $R=3$, $L=1$ $C=1/2$ και $\upsilon_c(0)=i_L(0)=1$ να ευρεθούν τα $\upsilon_c(t)$ $i_L(t)$ .

(1) Kirchhoff's current law:

$$i_c = C\frac{dV_c}{dt} = u(t) - i_L \quad ①$$

Kirchhoff's voltage law:

$$V_L = L\frac{di_L}{dt} = -V_R + V_C \quad ②$$

$$V_R = i_R R \quad ③$$

$$i_R = i_L \quad ④$$

$$② \xrightarrow[④]{③} \quad L\frac{di_L}{dt} = -i_L \cdot R + V_c$$

If. $x_1 = V_c$

$x_2 = i_L$.

then:
$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{C} x_2 + \frac{1}{C} u(t)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2$$

Output: $y_1(t) = V_o(t) = R x_2$
$$Y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(2) Transfer function:

$$\frac{Y}{u} = C(sI - A)^{-1} \cdot B$$

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} (s + \frac{R}{L}) & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}$$

$$\det(sI - A) = \Delta(s) = s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}$$

then
$$G(s) = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{R}{L}}{\Delta(s)} & -\frac{1}{C \cdot \Delta(s)} \\ \frac{1}{L \cdot \Delta(s)} & \frac{s}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{\frac{R}{LC}}{\Delta(s)}$$

$$\therefore G(s) = \frac{R/LC}{s^2 + \frac{R}{L} s + \frac{1}{LC}}$$

Άρα $G(s) = \dfrac{6}{s^2+3s+2}$

(3) Η $e^{At}$ θα υπολογισεί βάσει του Θεωρήματος Cayley - Hamilton.

Οι ιδιοτιμές του συστήματος είναι $\lambda_1 = -1$.
$\lambda_2 = -2$

Αφού η μήτρα A είναι 2ης τάξης κρατάμε τους δύο πρώτους όρους του: $R(\lambda) = \underbrace{\alpha_0 + \alpha_1 \lambda}, + \alpha_2 \lambda^2 + \cdots\cdots + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1}$

Γνωρίζουμε ότι οι γραμμικές εξισώσεις είναι της μορφής $F(\lambda_i) = R(\lambda_i)$

Άρα

$$e^{\lambda_1 t} = e^{-t} = \alpha_0 - \alpha_1$$

$$e^{\lambda_2 t} = e^{-2t} = \alpha_0 - 2\alpha_1$$

Λύνουμε ως προς $\alpha_0$ και $\alpha_1$

$$\alpha_0 = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

Επομένως $F(A) = e^{At} = \alpha_0 I + \alpha_1 A =$

$$= (2e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + (e^{-t} - e^{-2t}) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & 0 \\ 0 & 2e^{-t} - e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -3e^{-t} + 3e^{-2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}}_{\text{μεταβατική μήτρα κατάστασης}} = e^{At}$$

(4) Να ευρεθούν τα $V_C(t)$ , $I_L(t)$ 

Αρχικές συνθήκες $V_C(0) = i_L(0) = 1$

Γνωρίζουμε ότι η απόκριση δίνεται από την σχέση

$$\underline{x}(t) = e^{At}\underline{x}(0) + A^{-1}(e^{At} - I)\cdot B\underline{K}$$

όπου $\underline{u}(t) = K$. {είσοδος βαθμίδας $u(t)=1$}

Από τις αρχικές συνθήκες $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} V_c(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Έχουμε:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left( \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & -2e^{-t} + 2e^{-2t} \\ e^{-t} - e^{-2t} & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 - 4e^{-t} + e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 - 4e^{-t} + 2e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

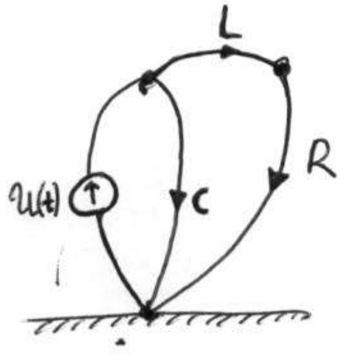
$$V_c(t) = 3 - 4e^{-t} + 2e^{-2t}$$

$$i_L(t) = 1 - 2e^{-t} + 2e^{-2t}$$

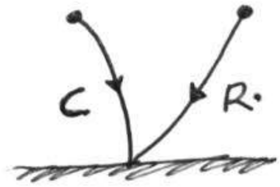
Στην περίπτωση που ζητούσαμε μόνο την απόκριση των $V_c(t)$ και $i_L(t)$ στις αρχικές συνθήκες ($u = 0$) τότε:

$$V_c(t) = e^{-2t}$$

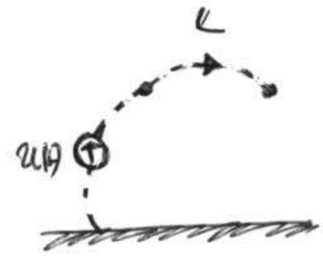
$$i_L(t) = e^{-2t}$$




Γράφος




Δένδρο




Δεσμοί

Τάξη συστήματος : $n=2$

Μεταβλητές κατάστασης : $V_C\ ,\ i_L$

Εξισώσεις στοιχείων. $B-S=4-1=3$

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{C}\,i_C$$

$$\frac{dI_L}{dt}=\frac{1}{L}\,V_L$$

$$V_R=R\cdot i_R$$

Εξισώσεις συμβατότητας $B-N+1-S_T=4-3+1-1=1$

$$-V_C+V_L+V_R=0 \rightarrow$$

$$V_L=V_C-V_R$$

Εξισώσεις συνέχειας $N-1-S_A=3-1-0=2$

$$u-i_L-i_C=0 \rightarrow$$

$$\rightarrow i_C=u-i_L$$

$$i_L-i_R=0 \rightarrow$$

$$i_R=i_L$$

$$\frac{dV_C}{dt}=\frac{1}{C}\,i_C=\frac{1}{C}\,(u-i_L)=\frac{1}{C}\,u-\frac{L}{C}\,i_L$$

$$\frac{dI_L}{dt}=\frac{1}{L}\,V_L=\frac{1}{L}\,(V_C-V_R)=\frac{1}{L}V_C-\frac{R}{L}\,i_R=\frac{1}{L}V_C-\frac{R}{L}\,i_L$$

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_C\\ \dot{i}_L\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{C}\\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ i_L\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{C}\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$$\mathbf{V_o}=V_R=R\cdot i_R=R\cdot i_L \rightarrow$$

$$V_o=\begin{bmatrix}0 & R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_C\\ i_L\end{bmatrix}$$