Παράδειγμα:
(Cayley-Hamilton)

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \underline{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 1] \underline{x}$$

(A) Θα υπολογισθούν οι ιδιοτιμές της διεργασίας αυτής.

(B) Θα υπολογισθεί η μεταβατική μήτρα κατάστασης της διεργασίας.

(Γ) Για $\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ και u = μοναδιαία βαθμίδα θα προσδιορισθεί η y(t).

(Δ) Θα προσδιορισθεί η συνάρτηση μεταφοράς $y/u = G_j(s)$.

(A) Οι ιδιοτιμές προκύπτουν ως

$$\text{Det}(sI-A) = \text{Det}\begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+3 \end{bmatrix} = (s-1)(s-2)$$

$$\text{ήτοι} \qquad \lambda_2 = -1, \quad \lambda_2 = -2$$

(B) Χρησιμοποιούμε την τεχνική Cayley-Hamilton. Αφού η μήτρα A είναι 2ης τάξης, το πολυώνυμο $R(\lambda)$ θα είναι πρώτου βαθμού, ήτοι,

$$R(\lambda) = \alpha_o + \alpha_1\lambda$$

Με αντικατάσταση των λ_1 και λ_2 στην Εξ. (2-137) προκύπτουν δύο γραμμικές εξισώσεις:

$$F(\lambda_1) = R(\lambda_1) \qquad\qquad F(\lambda_2) = R(\lambda_2)$$

$$e^{\lambda_1 t} = \alpha_o + \alpha_1\lambda_1 \qquad\qquad e^{\lambda_2 t} = \alpha_o + \alpha_1\lambda_2$$

$$e^{-t} = \alpha_o - \alpha_1 \qquad\qquad e^{-2t} = \alpha_o - 2\alpha_1$$

Λύνουμε ως προς α_o και α_1,

$$\alpha_o = 2e^{-t} - e^{-2t}$$

$$\alpha_1 = e^{-t} - e^{-2t}$$

Επομένως

$$F(A) = e^{At} = \alpha_o I + \alpha_1 A$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_o & 0 \\ 0 & \alpha_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1 \\ -2\alpha_1 & -3\alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^{-t}-e^{-2t} & e^{-t}-e^{-2t} \\ -2(e^{-t}-e^{-2t}) & -(e^{-t}-2e^{-2t}) \end{bmatrix}$$

(Γ)

$$y(t) = C\underline{x} = C\left(e^{At}\underline{x}_o + A^{-1}\left(e^{At}-I\right)B\right)$$

$$= C\left\{\begin{bmatrix} 3e^{-t}-2e^{-2t} \\ -3e^{-t}+4e^{-2t} \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-t}-e^{-2t} \\ 1-e^{-t}+2e^{-2t} \end{bmatrix}\right\}$$

$$= 2e^{-2t} + \frac{1}{2}C\begin{bmatrix} 1-2e^{-t}+e^{-2t} \\ 2e^{-t}-2e^{-2t} \end{bmatrix}$$

$$= 2e^{-2t} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-2t}\right) \longrightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}e^{-2t}}$$